Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória
aula 1

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.utl.pt)

Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

2.1. Otimização Combinatória - Introdução

2.2. Relaxações

- Relaxação
- Relaxação Linear
- Relaxação Lagrangeana – Método de Subgradiente

2.3. Resolução exata de problemas

- Branch and Bound
- Planos de Corte

2.4. Software

Bibliografia

- F.S. Hillier; G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 9th ed., McGraw-Hill, 2009.
- L. Wolsey, Integer Programming, John Wiley & Sons, 1998.
- Shalliker, J. and A. Suleman, Guia de Simulação Discreta por Computador usando SIMUL8, SIMUL8 Corporation, 2012.

Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Hipóteses de PL

Divisibilidade

Aditividade e Proporcionalidade

Certeza

Objetivo Único

Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Hipóteses de PL

~~Divisibilidade~~

quantidades discretas → MODELOS DISCRETOS

~~Aditividade e Proporcionalidade~~

descontinuidades
não-linearidades → { MODELOS DISCRETOS
PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

~~Certeza~~

estimativas de parâmetros → { ANÁLISE DE SENSIBILIDADE (WHAT-IF)
PARAMETRIZAÇÃO
PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

~~Objetivo Único~~

múltiplos objetivos → PROGRAMAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Otimização Combinatória

Programação Linear Inteira (PLI)

Um **Problema de Programação Linear Inteira (PLI)** é um PL em que todas (**PLI puro**) ou parte (**PLI misto**) das variáveis só podem assumir valores inteiros.

Variáveis inteiras – para representar quantidades indivisíveis

Variáveis binárias – para decisões Sim/Não – **Programação Binária**

Problemas de Otimização Combinatória

– a solução ótima é um subconjunto de um conjunto finito.

Problemas que poderiam ser resolvidos por enumeração! Crescimento exponencial!

- **Exemplos**: Afetação ($n!$); Mochila (2^n); Cobertura (2^n); Caixeiro Viajante $(n-1)!$; etc.

Otimização Combinatória

- **Enumeração** -> só se conseguem resolver instâncias de pequenas dimensões!

n	log n	$n^{0.5}$	n^2	2^n	n!
10	3.32	3.16	10^2	1.02×10^3	3.60×10^6
100	6.64	10.00	10^4	1.27×10^{30}	9.33×10^{157}
1000	9.97	31.62	10^6	1.07×10^{301}	4.02×10^{2567}

- Dado um PLI como:
  - identificar a SO?
  - impor condições de paragem num algoritmo de resolução de problemas de PLI?
- **Minorantes**; **Majorantes**

OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Aplicações

- ✓ Análise de investimentos
- ✓ Seleção de projetos
- ✓ Localização de equipamentos (fábricas, hangares, carros de apoio) ou de equipas de emergência e de apoio técnico
- ✓ Distribuição; Rotas; Carregamento
- ✓ Desenho de redes (comunicações)
- ✓ Escalonamento de pessoal, de veículos e de equipamentos

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Resolução

Algoritmos Exatos:

branch-and-bound (Land, Doig, 1960) (Little, Murty, Sweeney, Karel, 1963)

planos de corte (Gomory, 1960)

Métodos Não Exatos:

Técnicas de arredondamento

Heurísticas

básicas; construtivas; pesquisa local; metaheurísticas;
inspiração social: pesquisa tabu; *ant colonies*
inspiração física: *simulated annealing*
inspiração biológica: genéticos; redes neuronais

Relaxações; Métodos de Subgradiente

Software:

Excel/Solver

Visual Basic

CPLEX; LINGO; LINDO

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Resolução

- PLI de Minimização: $Z^* = Min\{\mathbf{cx}: \mathbf{x} \in P \cap X, X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$
  - ✓ Majorantes - Heurísticas
  - ✓ Minorantes !

  $\left.\right\} \underline{Z} \leq Z^* \leq \overline{Z}$
- Como avaliar a qualidade de uma SA ?
- Minorantes (limites duais)
  - Relaxação
    - ✓ Ideia: substituir um problema difícil de resolver por um mais simples e cujo valor ótimo não exceda Z^*
    - ✓ "Aumentar" a RA; Substituir a FO por outra função que nunca exceda a FO inicial

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

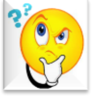
Def.: Um problema (PR): $z_R = Min\{\, f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P \subseteq \mathbb{R}^n\}$

é uma **Relaxação** de um (PI) de minimização:

$$z = Min\{\, \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

se: $P \supseteq X \quad \wedge \quad f(\mathbf{x}) \leq c(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in X$

Teor.: Se (PR) é relaxação de (PI), então: $z_R \leq z$



- Como construir relaxações "interessantes" ?

Otimização Inteira

Relaxações

- A **relaxação linear** de um PLI é o problema de PL que resulta do PLI por omissão das restrições de integralidade.
- Dado um PLI de minimização: $z = \text{Min}\{\mathbf{c}\,\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X \cap \mathbb{Z}^n\}$

  a Relaxação Linear (PLR) é: $z_{RL} = \text{Min}\{\mathbf{c}\,\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$

  ✓ É relaxação pois: $X \cap \mathbb{Z}^n \subseteq X$ e a FO não se altera!

  ✓ Logo: $z_{RL} \leq z$

Teor.:

(i) Se a relaxação PLR é impossível, o problema inicial PLI é impossível;

(ii) Seja $\mathbf{x}^*$ uma SO de PLR. Se $\mathbf{x}^* \in \mathbb{Z}^n$ então, $\mathbf{x}^*$ é SO de PLI.

Otimização Inteira

Relaxações

Outras relaxações para problemas conhecidos:

- Árvore geradora mínima (SST) com restrições de capacidade:
- Árvore geradora mínima com restrições de grau:
- Roteamento: Nodos; Arcos; Gerais
  - TSP orientado:
  - TSP não-orientado (simétrico):
  - ARP orientado:
  - ARP não orientado:

Otimização Inteira

Relaxações

Outras relaxações para problemas conhecidos:

- Árvore geradora mínima (SST) com restrições de capacidade: SST
- Árvore geradora mínima com restrições de grau: SST
- Roteamento: Nodos; Arcos; Gerais
  - TSP orientado: Afetação
  - TSP não-orientado (simétrico): Árvore-1
  - ARP orientado: PT (Problema de Transportes)
  - ARP não orientado: matching

Otimização Inteira

Exemplo

- Considere-se o (PLI)

$$Z^* = Min\ Z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 & \text{(R1)} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

SOLVER

- Resolver o (PLI)
- Resolver a relaxação linear (PLR)
- Resolver o (PLI) sem uma das restrições funcionais (R1)

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Graficamente - PLR

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \cancel{\in Z_0^+} \geq 0 \end{cases}$$

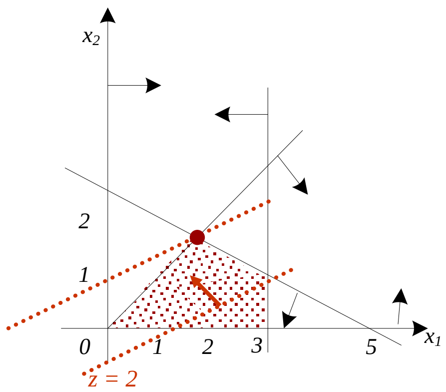
OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Graficamente - PLR

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \cancel{\in Z_0^+} \geq 0 \end{cases}$$



$$\mathbf{x}_{RL} = \left(x_1^{RL}; x_2^{RL}\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \qquad z_{RL} = -\frac{5}{3}$$

- SA de PLI: $\mathbf{x} = (0,0)$

$$\boxed{z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = z_{(0,0)}}$$

Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente - PLI

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente - PLI

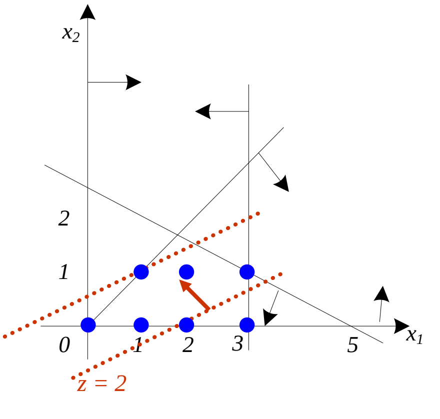
$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$\mathbf{x}^* = (1;1)$$

$$z^* = -1$$

$$z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* = -1 \leq 0 = z_{(0,0)}$$



Otimização Inteira

Exemplo

- Graficamente – PLI sem 1ª restrição

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

Otimização Inteira

Exemplo

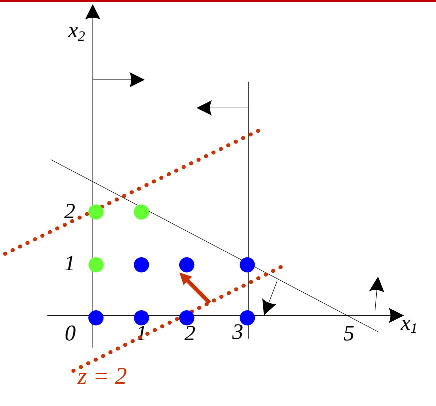
- Graficamente – PLI sem 1ª restrição

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$\tilde{x} = (0;2)$$

$$\tilde{z} = -4$$



Otimização Inteira

Relaxações

- **Dualidade** – obtenção de minorantes!
- O valor de qualquer **SA dual** é um **minorante** para o valor ótimo do **PLI**

(de minimização)

Teor.: Dualidade Fraca: $w(\mathbf{u}) \le z(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in X,\ \forall \mathbf{u} \in U$

Teor.: Dualidade Forte:

dado um par de problemas duais, se um tem SO, então o outro também tem e os valores óptimos dos dois problemas coincidem $w^* = z^*$

Otimização Inteira

Relaxações

- Dado um **PLI** de minimização: $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$
- Uma **relaxação de PLI** é o problema: $z' = Min\left\{\mathbf{cx} :\ \mathbf{x} \in X\right\}$
- Se juntarmos as restrições "complicadas" à FO considerando multiplicadores

obtemos, para $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_m)$ fixo, o problema:

PLI(u): $z(u) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

- PLI(**u**) é uma relaxação de PLI – Relaxação Lagrangeana
- **u** é o vector de multiplicadores de Lagrange – variáveis duais!

Otimização Inteira

Relaxações

- PLI(u) é uma relaxação de PLI, pois:

$$X \supseteq \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$$

$$\underset{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}}{\mathbf{cx} + \mathbf{u}}\underset{\mathbf{b}-\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}}{(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})} \leq \mathbf{cx}$$

Teor.: Fraco da Dualidade Lagrangeana: $z(\mathbf{u}) \leq z, \ \forall \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$

- Pretendemos obter o máximo valor de $z(\mathbf{u})$, resolvendo o Dual Lagrangeano:

$$w_{DL} = \mathbf{max}\{z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

E se:
Restrições Relaxadas "≥" ou "=" **?**

Otimização Inteira

Relaxações

- **Dualidade Lagrangeana** – se podemos obter apenas minorantes com o problema dual (de difícil resolução!) – com a Dualidade Lagrangeana podemos reforçar tais limites!

- Árvore geradora mínima com restrições (capacidade ou grau)
  - SST
  - com restrições relaxadas penalizadas e juntas à F.O.!

Otimização Inteira

Exemplo

- Retome-se o PLI

$$Min \;\; z = x_1 - 2x_2$$

$$\left.\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{array}\right\} X \end{cases}\right. \qquad \mathbf{x} \in X$$

- Definir a função Dual Lagrangeana

PLI(**u**): $z(u) = \underset{\mathbf{x} \in X}{Min}\{x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2)\}$

$= \ldots$

Otimização Inteira

Exemplo

- Função Dual Lagrangeana

Otimização Inteira

Exemplo

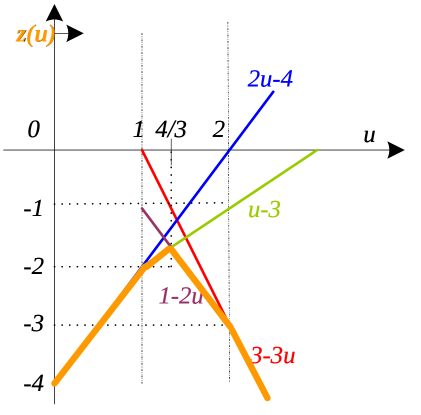
- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases} 2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1 \\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3} \\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2 \\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2 \end{cases}$$

$$w_{DL}=\max_{u\ge 0}\{z(u)\} \Rightarrow u=4/3$$

$$w_{DL}=-\frac{5}{3}=z^*_{RL}\le z^*=-1$$

O Dual Lagrangeano é um problema não linear!



Otimização Inteira

Exemplo

- Fixando $u=4/3$, e resolvendo PLI(u)

$$z(\tilde{u})=\min_{\mathbf{x}\in X}\left\{x_1-2x_2+\frac{4}{3}(-x_1+x_2)\right\}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}=\boxed{}$$

$$\tilde{z}(4/3)=\boxed{}$$

Solver...

- Do Solver podemos ver que a restrição relaxada não é verificada!
- Haverá algum valor para u para o qual a SO de PLI(u) seja a SO de PLI?
- E se tivéssemos relaxado a 2ª restrição em vez da 1ª?

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Graficamente – PLI($u = 4/3$)

$$\tilde{z}(4/3) = Min\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

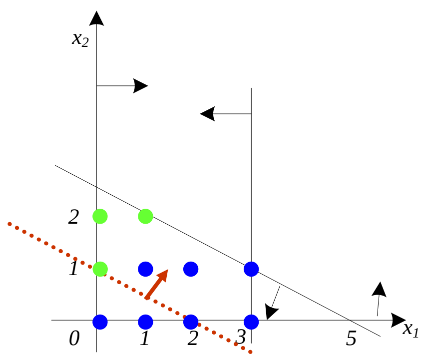
OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exemplo

- Graficamente – PLI(u)

$$\tilde{z}(4/3) = Min\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$



$$\tilde{\mathbf{x}} = (1\,;2) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3\,;1)$$

$$\tilde{z}(4/3) = -\frac{5}{3} = z_{RL}$$

Otimização Inteira

Relaxações

Teor.: Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI$(\tilde{\mathbf{u}})$ e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ (complementaridade)

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. De PLI.

Prova: ...

Otimização Inteira

Relaxações

Teor.: Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI$(\tilde{\mathbf{u}})$ e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. (complementaridade) $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI.

Prova:

$$w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \{z(\mathbf{u})\} \geq z(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) \underset{\text{(iii)}}{=} \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} \underset{\text{(ii)} \tilde{\mathbf{x}} \text{ é SA de PLI}}{\geq} z^*$$

Sendo relaxação, $w_{DL} \leq z^* \Rightarrow w_{DL} = z^*$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exercícios

1. Escrever o Dual Lagrangeano considerando os seguintes casos:
   a) Problema inicial de Maximização em que se relaxam restrições de tipo ≤
   b) Problema inicial de Minimização em que se relaxam restrições de tipo ≤
   c) Problema inicial de Maximização em que se relaxam restrições de tipo ≥
   d) Problema inicial de Minimização em que se relaxam restrições de tipo =

2. Definir o dual Lagrangeano do seguintes PLI, dualizando as restrições assinaladas (*):

a) $Max\ \ z = 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 & (*) \\ x_1 + x_2 \leq 1 & \\ x_3 + x_4 \leq 1 & \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{B} & \end{cases}$$

b) $Min\ \ z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 3 & (*) \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 3 & (*) \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, 2 & \end{cases}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exercícios

3. Resolver os problemas relaxados do exercício 2 considerando, em cada alínea, os multiplicadores seguintes:
   a) i) $u = 2$; ii) $u = 0{,}5$; iii) $u = 6$; iv) $u = 1$
   b) i) $u = (1{,}1)$; ii) $u = (0{,}1)$; iii) $u = \left(1, \frac{1}{2}\right)$; iv) $u = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

4. Considerando $\mathbf{u} = (4{,}6)$ defina e resolva a relaxação Lagrangeana de

$$Min\ \ 8x_{11} + 7x_{21} + 4x_{22} + x_{31} + 3x_{32} + 36y_1 + 12y_2 + 36y_3$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 6 & (*) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 6 & (*) \\ x_{11} + x_{12} \leq 12y_1 & \\ x_{21} + x_{22} \leq 12y_2 & \\ x_{31} + x_{32} \leq 12y_3 & \\ y_i \in \{0,1\}\ ;\ 0 \leq x_{ij} \leq 6 & i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Identificar este problema como uma instância de um problema estudado, definindo as variáveis de forma compatível.